BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2009

MEXANİKA

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕБРИСТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Р.А.ИСКЕНДЕРОВ
Азербайджанский Архитектурно-Строительный Университет
r.iskanderov@mail.com

Рассмотрены задачи динамической устойчивости для замкнутой продольно подкрепленной цилиндрической оболочки, шарнирно опертой по торцам, заполненной средой при осевом сжатии и равномерном внешнем давлении. Найдены формулы для определения критического "времени" и соответствующее найденному критическому "времени" значений критических напряжений.

При внезапном приложении к тонкостенным упругим системам нагрузок, вызывающих появление сжимающих усилий, превышающих статические критические значения, могут возникать движения, характеризующиеся монотонным возрастанием прогибов. При этом, как показано впервые в работе [1], наблюдаемые формы потери устойчивости не всегда совпадают с формами, соответствующими минимальным статическим критическим нагрузкам. Поэтому при решении рассматриваемых задач возникает необходимость принятия определенного критерия динамической потери устойчивости. Обычно такие критерии формулируются для неидеальных систем, имеющих начальные отклонения. Распространенные подходы к определению динамической критической нагрузки достаточно подробно рассмотрены в работах [2,3], где приведены решения целого ряда задач такого типа. Устойчивость цилиндрической оболочек, усиленных перекрестной системой ребер, заполненной средой при статическом продольном осевом сжатии, исследована в работе [4,5,8,9].

В данной работе в рамках линейной задачи в качестве критерия динамической потери устойчивости принято аналитическое условие возможности интенсивного развития прогибов для монотонно-возрастающего изменения нагрузки во времени.

Рассмотрим замкнутую продольно подкрепленную цилиндрическую оболочку с заполнителем, шарнирно опертую по торцам, при действии осевых сжимающих сил и равномерного внешнего давления, которые в докритическом состоянии приводят к однородному напряженному состоянию, характеризующемуся сжимающими напряжениями σ_x и σ_y, изменяющимися во времени по тому же закону, что и соответствующие внешние нагрузки. Предполагается, что волновым характером распространения усилий можно пренебречь.

Потенциальная и кинетическая энергии для рассматриваемой цилиндрической оболочки, подкрепленной регулярной системой продольных ребер, определяются по формулам [6]:

$$\Pi = Э + A + K, \tag{1}$$

здесь

$$Э = \frac{\mathrm{Eh}^3}{24(1-\nu^2)R^2}\int_0^{\xi_1}\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\theta}\right)^2\right]\right\}d\xi d\theta +$$

$$+\frac{\mathrm{h}}{2\mathrm{ER}^2}\int_0^{\xi_1}\int_0^{2\pi}\left\{\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\right)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi\partial\theta}\right)^2\right]\right\}d\xi d\theta +$$

$$+\frac{1}{2R^3}\sum_{i=1}^{k}\left\{\int_0^{\xi_1}\left[E_c I_{yc}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}\right)^2 + G_c I_{kp.c}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\theta}\right)^2\right]\Bigg|_{\theta=\theta_i} d\xi\right\} +$$

$$+\sigma_x h\int_0^{\xi_1}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}-\nu\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)^2\right\}d\xi d\theta + \sigma_x F_c R\sum_{i=1}^{k}\int_0^{\xi_1}\left[\frac{\sigma_x}{E}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2R^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\xi}\right)^2\Bigg|_{\theta=\theta_i}\right]d\xi + \frac{\sigma_y h}{2}\int_0^{\xi_1}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+w\right)w\,d\xi d\theta;$$

$$K = \rho_0 h R^2\int_0^{\xi_1}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 d\xi d\theta + \rho_c F_c R\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\Bigg|_{\theta=\theta_i} d\xi;$$

$\xi = \frac{x}{R}$, $\theta = \frac{y}{R}$; E_c, G_c - модуль упругости и сдвига материала продольных ребер; k - количество продольных ребер; σ_x – осевые сжимающие напряжения; σ_y – кольцевые сжимающие напряжения; u, v, w – компоненты вектора перемещений оболочки; ρ_0 и ρ_c - соответственно, плотности материалов оболочки и продольных ребер, h и R – толщина и радиус оболочки, соответственно; E, ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки; $\xi_1 = \frac{L_1}{r}$, L_1 - длина оболочки; $F_c, I_{yc}, I_{kp.c}$ - соответственно, площади и моменты инерции поперечного сечения продольного стержня относительно оси ox и oz, а также момент инерции при кручении; t – временная координата; F_c – площадь поперечного сечения продольных ребер.

Влияния среды на оболочку определяются как внешние поверхностные нагрузки, приложенные к оболочке, и вычисляются как работа, совершенная этими нагрузками при переводе системы из деформированного состояния в начальное недеформированное, и представляется в виде:

$$A = -R^2 \int_0^{\xi_2} \int_0^{2\pi} q_z w \, d\xi \, d\theta \,. \qquad (2)$$

Для определения q_z применяется модель Пастернака [7]. Суть этой модели заключается в том, что влияния среды на оболочку на поверхности контакта определяется зависимостью

$$q_z = \left(\tilde{q} + \tilde{q}_0 \nabla^2\right) w = Kw, \qquad (3)$$

где ∇^2 - двумерный оператор Лапласа на поверхности контакта.
Уравнение неразрывности деформаций записывается в виде [6]:

$$\Delta\Delta\varphi = -ER \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \,. \qquad (4)$$

Прогиб оболочки при потере устойчивости ищем в виде:

$$w = \sin d_m \xi \left[w_1(t) \cos n\theta + w_2(t) \sin n\theta \right], \qquad (5)$$

где $w_1(t)$ и $w_2(t)$ - функции времени, подлежащие определению.

Подставляя (5) в уравнение совместности деформаций (4) и решая его относительно φ, находим выражение для функции напряжений

$$\varphi = -\frac{\sigma_x R^2 \theta^2}{2} - \frac{\sigma_y R^2 \xi^2}{2} + E \frac{d_m^2 R}{\left(d_m^2 + n^2\right)^2} \left(w_1 \cos n\theta + w_2 \sin n\theta\right) \sin d_m \xi \,. \qquad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в (3), (2) и (1), на основании уравнения Лагранжа второго рода [7], можно получить два независимых обыкновенных дифференциальных уравнения относительно параметров $w_1(t)$ и $w_2(t)$ прогиба оболочки. Оба этих уравнения можно представить в виде

$$\frac{d^2 \bar{w}}{dt^2} + \omega_{mn}^2 \left(1 - \frac{p}{p_{mn}} - \frac{q}{q_{mn}}\right) \bar{w} = 0 \,, \qquad (7)$$

где под $\bar{w}$ понимается $w_1(t)$ или $w_2(t)$ в зависимости от того, каким из слагаемых выражения (5) аппроксимируется прогиб при потере устойчивости; ω_{mn}, p_{mn} и q_{mn} - собственная частота колебаний ненагруженной системы, параметры критических значений статических продольных напряжений и внешнего давления, соответствующие рассматриваемой форме изгиба и определяемые уравнением относительно w_1 по формулам:

$$\omega_{mn}^2=\frac{E\Delta_{mn}}{\left(1-\nu^2\right)\rho_0R^2}\cdot\frac{1}{1+2\overline{\rho}_c\overline{\gamma}_c\sigma_{1n}};\ \ p_{mn}=\frac{\Delta_{mn}}{d_m^2\left(1+2\overline{\gamma}_c\sigma_{1n}\right)};\ q_{mn}=\frac{\Delta_{mn}}{n^2-1};$$

$$\Delta_{mn}=\frac{\left(1-\nu^2\right)d_m^4}{\left(d_m^2+n^2\right)^2}+a^2\left(d_m^2+n^2\right)^2+\frac{\tilde{q}-\tilde{q}_0\left(d_m^2+n^2\right)\left(1-\nu^2\right)R^2}{Eh}+$$

$$+2\eta_c^{(1)}d_m^4\sigma_{1n}^{(1)}+2\mu_c^{(1)}\sigma_{2n}d_m^2n^2;\ \ q=-\frac{\sigma_y\left(1-\nu^2\right)}{E};\ \ p=-\frac{\sigma_x\left(1-\nu^2\right)}{E};$$

$$\sigma_{1n}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\cos^2\frac{2\pi n}{k}i;\ \ \sigma_{2n}=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\sin^2\frac{2\pi n}{k}i;\ \ \overline{\gamma}_c^{(1)}=\frac{F_ck}{2\pi Rh};\ a^2=\frac{h^2}{12R^2};$$

$$\overline{\rho}_c=\frac{\rho_c}{\rho_0};\ \eta_c^{(1)}=\frac{E_c\left(J_{yc}+h^2F_c\right)k}{2\pi R^3hE};\ \ \mu_c^{(1)}=\frac{G_c}{E}\left(1-\nu^2\right)\overline{\mu}_c^{(1)};\ \ \overline{\mu}_c^{(1)}=\frac{J_{\kappa p.c}k}{2\pi R^3h}.$$

Уравнение (7) определяет характер движения продольно подкрепленной цилиндрической оболочки. При этом существенное значение имеет закон изменения напряжений в системе, т.е. закон изменения внешней нагрузки во времени.

С целью формулировки критерия динамической потери устойчивости уравнение (7), при действии только одной из рассматриваемых нагрузок, удобно записать в виде

$$\frac{d^2\overline{w}}{dt^2}+\omega_{mn}^2\left(1-\frac{\sigma}{\sigma_{mn}}\right)\overline{w}=0, \qquad (8)$$

где $\sigma=\sigma\left(t\right)-$напряжения, вызываемые заданной внешней нагрузкой, σ_{mn} – критические значения этих напряжений при статическом нагружении, соответствующие рассматриваемой форме изгиба.

Предположим, что внешняя нагрузка возрастает по линейному закону. В этом случае сжимающие напряжения в оболочке изменяются во времени по закону $\sigma=\gamma t$, где γ - скорость возрастания напряжений. Задача состоит в определении такого времени t и соответствующего ему значения нагрузки, при которых становится возможным интенсивное развитие прогибов.

Подставляя $\sigma=\gamma t$ в (8), имеем

$$\frac{d^2\overline{w}}{dt^2}+\omega_{mn}^2\left(1-\frac{\gamma t}{\sigma_{mn}}\right)\overline{w}=0\cdot \qquad (9)$$

Уравнение (9) определяет характер движения системы при возникновении начального отклонения или начальной скорости. При $\sigma=\gamma t<\sigma_{mn}$ движение имеет колебательный характер; при $\sigma>\sigma_{mn}$ прогиб во времени будет развиваться монотонно.

Вводя замену $t=t_{mn}+\frac{\sigma_{mn}}{\gamma}$, где $\frac{\sigma_{mn}}{\gamma}$ - время, необходимое для того, чтобы напряжения достигли критического значения σ_{mn}, уравнение (9) приводим к виду

$$\frac{d^2\overline{w}}{dt^2} - b_{mn}t_{mn}\overline{w} = 0, \qquad b_{mn} = \frac{\gamma\omega_{mn}^2}{\sigma_{mn}}. \tag{10}$$

Решение уравнения (10) для дальнейшего изложения удобно представить в виде

$$w = C_0\left(1 + \frac{b_{mn}t_{mn}^3}{2\cdot 3} + \frac{b_{mn}^2 t_{mn}^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \cdots\right) + C_1\left(t_{mn} + \frac{b_{mn}t_{mn}^4}{3\cdot 4} + \frac{b_{mn}^2 t_{mn}^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7} + \cdots\right). \tag{11}$$

Постоянные интегрирования C_0 и C_1 определяются из начальных условий , т.е. при $t_{mn} = 0$, причем C_0 равно амплитуде начального прогиба, а C_1- амплитуде начальной скорости. Если движение вызвано начальным отклонением системы, то развитие прогибов происходит в соответствии с выражением

$$w = C_0\left(1 + \frac{b_{mn}t_{mn}^3}{2\cdot 3} + \frac{b_{mn}^2 t_{mn}^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} + \cdots\right), \tag{12}$$

которое представляет собой ряд по степеням куба $t_{mn}\sqrt[3]{b_{mn}}$. Поскольку куб этой величины начинает сильно возрастать после того, как она достигает значения, равного единице, за критерий динамической потери устойчивости, определяющий возможность начала интенсивного развития прогибов, представляется целесообразным принять условие $t_{mn}\sqrt[3]{b_{mn}} = 1$.

На основании этого условия для каждой формы изгиба можно определить «критическое» время

$$t_{kp} = t_{mn} + \frac{\sigma_{mn}}{\gamma} \tag{13}$$

по прошествии, которого становится возможным интенсивное развитие прогибов. После подстановки в (13) величины $t_{mn} = \frac{1}{\sqrt[3]{b_{mn}}}$ формула для определения критического времени принимает вид

$$t_{kp} = \sqrt[3]{\frac{\sigma_{mn}}{\gamma\omega_{mn}^2}} + \frac{\sigma_{mn}}{\gamma}. \tag{14}$$

Из (14) следует, что с увеличением скорости возрастания нагрузки критическое время, соответствующее определенной форме выпучивания, уменьшается. Соответствующее найденному критическому времени значение критических напряжений определяется по формуле

$$\sigma_{kp} = \sqrt[3]{\frac{\sigma_{mn}\gamma^2}{\omega_{mn}^2}} + \sigma_{mn}, \tag{15}$$

Из которой следует, что критические напряжения динамической потери устойчивости всегда больше статических критических напряжений. Из (14) и (15) следует, что с увеличением влияния жесткости заполнителя значения критического времени и критического напряжения уменьшаются.

Сравнивая t_{kp}, вычисленные для различных форм выпучивания, можно определить наименьшее из них и соответствующую ему форму выпучивания, а следовательно, и наименьшее значение внешней нагрузки, при которой становится возможным интенсивное развитие прогибов системы продольно подкрепленной цилиндрической оболочки с заполнителем, т.е. ее динамическая потеря устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амиро И.Я., Пальчевский А.С., Поляков П.С., Прядко А.А. Устойчивость ребристых цилиндрических оболочек при совместном действии осевого сжатия и кручения // Прикладная механика, 1977, № 12, с. 51-57.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972, 432 с.
3. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа: Задачи аэроупругости. М.: Наука, 1976, 416 с.
4. Латифов Ф.С., Исаев З.Ф. Устойчивость цилиндрической оболочки, усиленные перекрестной системой ребер заполненной средой при продольном осевом сжатии. Proceedings of İMM of NAS of Azerbaijan., 2007, v. 26(34), p. 115-122.
5. Латифов Ф.С., Салманов О.Ш. Задача о вынужденных осесимметричных колебаниях подкрепленной и нагруженной осевыми сжимающими силами цилиндрической оболочки, заполненной жидкостью // Механика машин, механизмов и материалов, Национальная Академия Наук Беларуси, №4 (5), 2008, с. 45-47.
6. Амиро И.Я., Заруцкий В.А. Теория ребристых оболочек. Методы расчета оболочек, М:. Наукова Думка, 1980, 367с.
7. Пастернак П.Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. М.: Стройиздат, 1954, 56 с.
8. Искендеров Р.А. Исследования влияния начального прогиба ребристой оболочки, заполненной средой, на критические напряжения общей потери устойчивости // Механика машин, механизмов и материалов, Национальная Академия Наук Беларуси, 2008, №4(5), с.56-57.
9. Искендеров Р.А., Исследование влияния начального прогиба оболочки, усиленной перекрестной системой ребер, заполненной средой на критические напряжения общей потери устойчивости. М.: Естественные и технические науки, 2008, №5(37), с.18-23.

MÜHİTLƏ DOLU QAPALI SİLİNDRİK ÖRTÜYÜN DİNAMİK YÜKLƏMƏDƏ DAYANIQLIĞI

R.Ə.İSKƏNDƏROV

XÜLASƏ

Ucları oynaqla bağlı, boyuna çubuqlarla möhkəmləndirilmiş mühitlə dolu qapalı silindrik örtüyün müntəzəm paylanmış xarici təzyiqdən və oxuboyu sıxılmada dinamik dayanıqlıq məsələsinə baxılır. Böhran "zamanı" və böhran "zamanına" uyğun böhran gərginliyini tapmaq üçün düsturlar tapılır.

STABILITY OF A RIBBED CYLINDRICAL SHELL WITH A FILLER UNDER DYNAMICAL LOADING

R.A.ISKENDEROV

SUMMARY

The article deals with the dynamical stability problems for a closed longitudinally stiffened cylindrical shell, simply supported by end faces, filled with medium under axial compression and uniform external pressure. We find formulas for determining critical "time" and the value of critical stresses that correspond to the found critical "time".